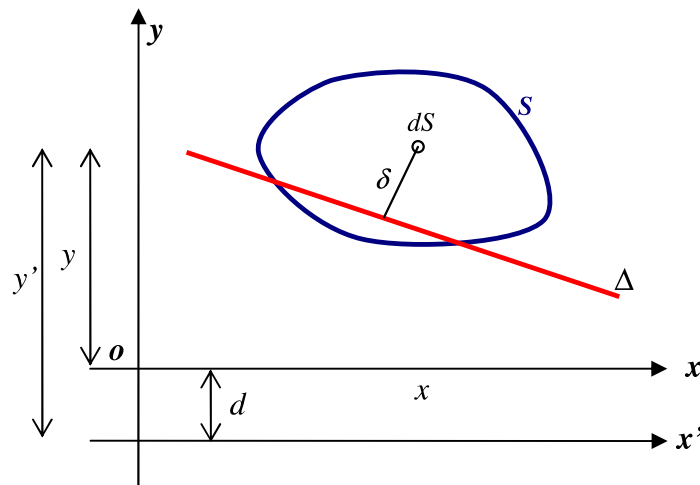


CARACTERISTIQUES DES SECTIONS PLANES

MOMENT STATIQUE D'UNE SECTION PLANE

Soient une aire plane S et une droite Δ . Le moment statique de la section S par rapport à Δ $m(S)/\Delta$ est défini par l'intégrale :

$$m(S)/\Delta = \iint_S \delta dS \quad (\text{dorénavant, on note le moment statique par rapport à } \Delta \text{ } m_\Delta).$$



Les moments statiques par rapport aux axes x et y s'expriment par :

$$m_x = \iint_S y dS \quad \text{et} \quad m_y = \iint_S x dS$$

Remarques :

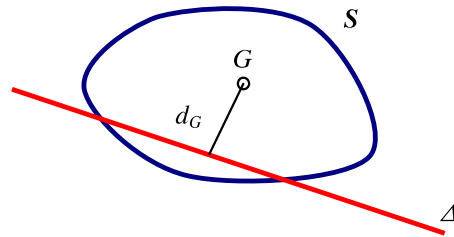
1. Le moment statique est homogène à un volume. Il s'exprime en $mm^3, cm^3 \dots$ etc.
2. Le moment statique d'une section S par rapport à un axe quelconque passant par son centre de gravité est nul.
3. Le moment statique d'une section par rapport à un axe de symétrie est nul, puisque cet axe passe par son centre de gravité.
4. Sur la figure ci-dessus, on peut noter que : $y' = y + d$. Par conséquent : $m_{x'} = m_x + S \cdot d$ (cette expression est valable uniquement si les droites x et x' sont parallèles). Si l'axe x passe par le centre de gravité de S , le moment statique par rapport à x' est donné par : $m_{x'} = S \cdot d$.

CENTRE DE GRAVITE D'UNE SECTION PLANE

La distance d_G du centre de gravité d'une section plane S à une droite Δ est définie par la relation suivante :

$$d_G = \frac{m_\Delta}{S}.$$

Cette relation permet aussi de calculer le moment statique d'une section connaissant la position de son centre de gravité.



MOMENT D'INERTIE, RAYON DE GIRATION D'UNE SECTION PLANE

Le moment d'inertie I_Δ de la section S par rapport à Δ est défini par l'intégrale :

$$I_\Delta = \iint_S \delta^2 dS.$$

Le rayon de giration de la section S par rapport à Δ est donné par la relation :

$$r = \sqrt{\frac{I_\Delta}{S}}.$$

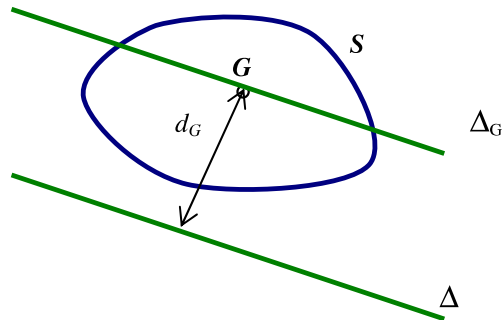
Pour les axes x et y , nous avons :

$$I_x = \iint_S y^2 dS, \quad I_y = \iint_S x^2 dS, \quad r_x = \sqrt{\frac{I_x}{S}} \quad \text{et} \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{S}}.$$

Théorème d'Huygens :

Le moment d'inertie I_Δ d'une section S par rapport à un axe quelconque Δ , situé dans le plan de cette section, est égal au moment d'inertie I_{Δ_G} par rapport à l'axe Δ_G , parallèle à Δ et passant par le centre de gravité G augmenté du produit de la grandeur de la surface par le carré de distance entre les deux axes Δ et Δ_G :

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + S \cdot d_G^2$$

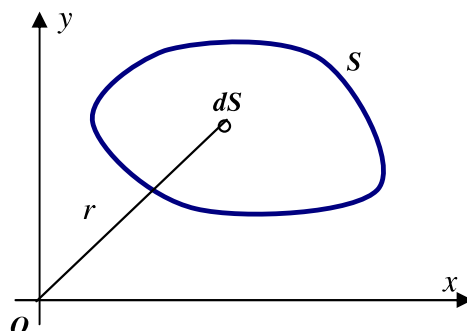


MOMENT POLAIRE D'UNE SECTION PLANE

Le moment d'inertie polaire d'une section S par rapport au point O est donné par l'intégrale :

$$K = \iint_S r^2 dS$$

$$K = \iint_S (x^2 + y^2) dS = I_x + I_y.$$

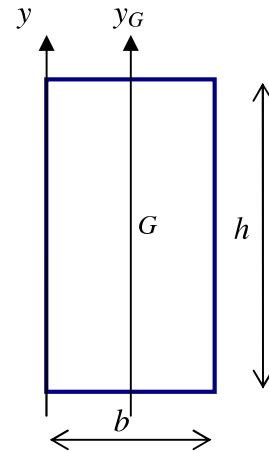


APPLICATION :

Énoncé

Soit une section carrée de largeur b et de hauteur h . On demande de calculer le moment statique et le moment d'inertie de cette section par rapport aux deux axes suivants :

- Un axe vertical (y) passant par le côté gauche de la section.
- Un axe vertical (y_G) passant par le centre de gravité de la section.



Solution

Calcul de m_y et I_y :

$$m_y = \iint_S x dS = \int_0^b \left(\int_0^h x dy \right) dx = \int_0^b (xy)_{y=0}^{y=h} dx$$

$$m_y = \int_0^b x h dx = \left(h \frac{x^2}{2} \right)_{x=0}^{x=b} = \frac{hb^2}{2}$$

De même : $m_x = \frac{bh^2}{2}$.

Remarque :

Le choix de la position de l'axe x n'influe pas sur la valeur du moment statique.

$$I_y = \iint_S x^2 dS = \int_0^b \left(\int_0^h x^2 dy \right) dx = \int_0^b (x^2 y)_{y=0}^{y=h} dx$$

$$I_y = \int_0^b x^2 h dx = \left(h \frac{x^3}{3} \right)_{x=0}^{x=b} = \frac{hb^3}{3}$$

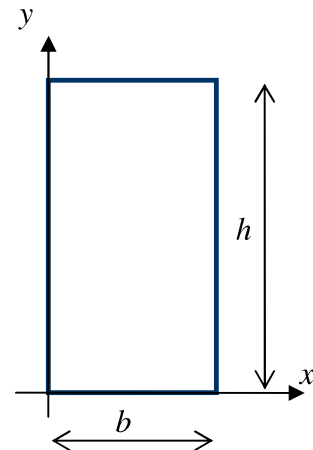
De même : $I_x = \frac{bh^3}{3}$.

Trouvons la position du centre de gravité par rapport à l'axe y :

$$d_y = \frac{m_y}{S} = \frac{hb^2/2}{bh} = \frac{b}{2}.$$

Et par rapport à l'axe x :

$$d_x = \frac{m_x}{S} = \frac{bh^2/2}{bh} = \frac{h}{2}.$$



Calcul de m_{y_G} et I_{y_G} :

$$m_{y_G} = \iint_S x dS = \int_{-b/2}^{b/2} \left(\int_{-h/2}^{h/2} x dy \right) dx = \int_{-b/2}^{b/2} (xy)_{y=-h/2}^{y=h/2} dx$$

$$m_{y_G} = \int_{-b/2}^{b/2} x h dx = \left(h \frac{x^2}{2} \right)_{x=-b/2}^{x=b/2} = \frac{h}{2} \left(\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} \right) = 0$$

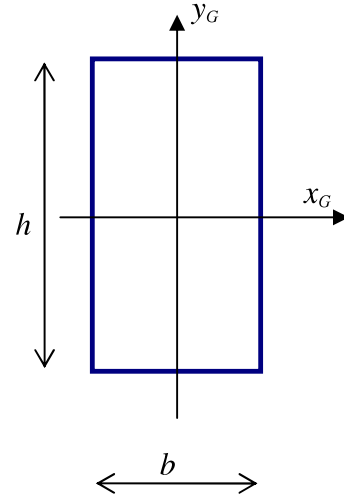
$$I_{y_G} = \iint_S x^2 dS = \int_{-b/2}^{b/2} \left(\int_{-h/2}^{h/2} x^2 dy \right) dx = \int_{-b/2}^{b/2} (x^2 y)_{y=-h/2}^{y=h/2} dx$$

$$I_{y_G} = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 h dx = \left(h \frac{x^3}{3} \right)_{x=-b/2}^{x=b/2} = \frac{h}{3} \left(\frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8} \right) = \frac{hb^3}{12}.$$

De même :

$$I_{x_G} = \iint_S y^2 dS = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\int_{-b/2}^{b/2} y^2 dx \right) dy = \int_{-h/2}^{h/2} (y^2 x)_{x=-b/2}^{x=b/2} dy$$

$$I_{x_G} = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \left(b \frac{y^3}{3} \right)_{y=-h/2}^{y=h/2} = \frac{b}{3} \left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) = \frac{bh^3}{12}.$$



DEVOIR

Exercice 1

Calculer le moment statique et le moment d'inertie d'une section circulaire de diamètre d , par rapport aux deux axes vertical (y) et horizontal (x) passant par son centre de gravité.

Indication :

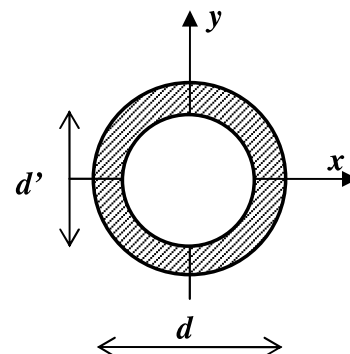
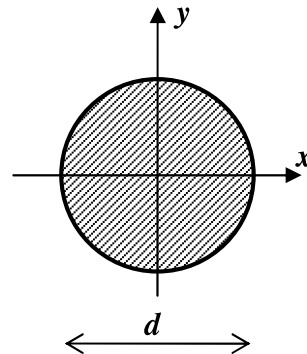
Utiliser les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0 \quad 2\pi] \text{ et } r \in \left[0 \quad \frac{d}{2} \right]$$

Avec : $dS = r \cdot dr \cdot d\theta$.

Exercice 2

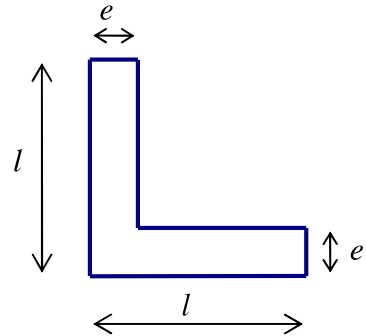
Mêmes questions pour une section circulaire creuse (voir figure ci-contre).



Exercice 3

Soit la cornière représentée ci-contre. On demande de calculer :

- Son centre de gravité.
- Les moments d'inertie par rapport à x_G et y_G .



Exercice 4

Mêmes questions pour la section ci-contre :

Application numérique :

$$b = 150mm .$$

$$h = 75mm .$$

$$e = 10mm .$$

